

章末复习(五) 因式分解

知识点一 因式分解的概念

1. (2024·安阳期末) 下列各式从左到右是因式分解的是 ()

A. $(a+1)(a-3)=a^2-2a-3$

B. $x^2-25=(x-5)(x+5)$

C. $a^2+2a-1=(a-1)^2$

D. $y^3+4y^2-2=y^2(y+4)-2$

知识点二 运用提公因式法分解因式

2. 把多项式 $5a^2b-10ab^2$ 分解因式时, 应提取的公因式是 ()

A. ab B. $5ab$ C. $5a^2b$ D. a^2b

3. 把多项式 $(m+1)(m-1)+(m-1)$ 提取公因式 $m-1$ 后, 另一个因式为 ()

A. $m+1$ B. $2m$ C. 2 D. $m+2$

4. (2024·通许县月考) 把多项式 $2(a-2)+6x(2-a)$ 分解因式, 结果是 ()

A. $(a-2)(2+6x)$ B. $(a-2)(2-6x)$

C. $2(a-2)(1+3x)$ D. $2(a-2)(1-3x)$

5. 分解因式:

(1) (2024·自贡) $x^2-3x=$ _____;

(2) (2024·开封期末) $a^2x^2y-axy^2=$ _____.

6. 分解因式:

(1) $4a^2b^3+8ab^2c$;

(2) $-8x^2y^2-4x^2y+2xy$;

(3) $(m-n)(2m+n)+(m-n)(4m+3n)$;

(4) $4m^2n(m-n)^2-2mn(n-m)^3$.

知识点三 运用公式法分解因式

7. 下列各式中, 可用平方差公式分解因式的是 ()

A. a^2+b^2

B. $-a^2-b^2$

C. $-a^2+b^2$

D. $a^2+(-b)^2$

8. 分解因式 $4x^2-y^2$ 的结果是 ()

A. $(4x+y)(4x-y)$ B. $4(x+y)(x-y)$

C. $(2x+y)(2x-y)$ D. $2(x+y)(x-y)$

9. 下列各式中, 能用完全平方公式分解因式的是 ()

A. $4x^2-1$

B. $4x^2+4x+1$

C. x^2-xy+y^2

D. $x^2-x+\frac{1}{2}$

10. 因式分解 $4x^2+4x+1$ 的结果是 ()

A. $4x(x+1)+1$

B. $(4x+1)^2$

C. $(2x+1)^2$

D. $(2x-1)^2$

11. 因式分解:

(1) (2024·德州) $x^2-4=$ _____;

(2) (2024·扬州) $2x^2-4x+2=$ _____.

12. 分解因式:

$$(1) (a+3)^2 - (a+b)^2;$$

$$(2) (x-1)^2 - 6(x-1) + 9;$$

$$(3) (x^2+9)^2 - 36x^2;$$

$$(4) (a^2-2)^2 + 2(a^2-2) + 1.$$

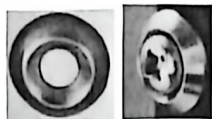
知识点四 分解因式的应用

13. 若 $y-x=-1$, $xy=2$, 则代数式 $-\frac{1}{2}x^3y +$

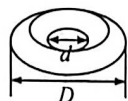
$x^2y^2 - \frac{1}{2}xy^3$ 的值是 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

14. **新考向 情境题** 工厂生产一种如图①所示的螺丝垫圈, 其示意图如图②, 已知 $D=16$ mm, $d=4$ mm, 则这个螺丝的垫圈底部圆环的面积为 _____ mm^2 . (结果保留 π)



图①



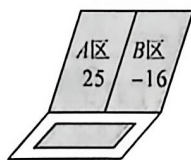
图②

15. 学校有一块边长为 13.2 m 的正方形场地, 准备在四个角各建一个边长为 3.4 m 的正方形喷水池, 剩余的部分修成绿地. 若购买 130 m^2 的草坪, 则够不够铺满绿地?

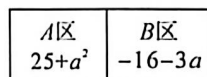
16. 有一电脑程序, 每按一次按键, 屏幕的 A 区域就会自动加上 a^2 , 同时 B 区就会自动减去 $3a$, 且均显示化简后的结果. 已知 A, B 两区初始显示的分别是 25 和 -16, 如图①. 第一次按键后, A, B 两区分别显示如图②.

(1) 从初始状态按 2 次后, 分别求 A, B 两区显示的结果;

(2) 从初始状态按 4 次后, 计算 A, B 两区式子的和, 这个和能为负数吗? 说明理由.



图①



图②

1.“探究性学习”小组的甲、乙两名同学进行因式分解的过程如下:

甲	乙
$a^2 - 2ab - 4 + b^2$ $= (a^2 - 2ab + b^2) - 4$ $= (a - b)^2 - 2^2$ $= (a - b + 2)(a - b - 2)$	$a^2 - ab - a + b$ $= (a^2 - ab) - (a - b)$ $= a(a - b) - (a - b)$ $= (a - b)(a - 1)$

请在他们解法的启发下,解答下列各题:

因式分解:

(1) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$;

(2) $m^3 - 2m^2 - 4m + 8$.

【材料 2】因式分解: $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$.

解:把 $x + y$ 看成一个整体,令 $x + y = a$,

则原式 $= a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$,

再将 $a = x + y$ 代入,

得原式 $= (x + y + 1)^2$,

此题用到的“整体思想”是数学解题中常见的思想方法.

(1) 根据材料 1,利用配方法进行因式分解:

$x^2 + 4x - 12$;

(2) 根据材料 2,利用“整体思想”进行因式分

解: $(x - y)^2 - 6(x - y) + 9$;

(3) 当 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边,且满足

$a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 6b - 10c + 43 = 0$ 时,判

断 $\triangle ABC$ 的形状,并说明理由.

2. 阅读下列材料,并解答相关问题.

【材料 1】教材中这样写道:“我们把 $a^2 + 2ab + b^2$ 和 $a^2 - 2ab + b^2$ 这样的式子叫作完全平方式”,如果关于某一字母的二次多项式不是完全平方式,我们常做如下变形:先添加一个适当的项,使式子中出现完全平方式,再减去这个项,使整个式子的值不变,这种方法叫作配方法,例如:因式分解: $x^2 - 2x - 3$.

解:原式 $= x^2 - 2x - 3$

$= x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$

$= (x - 1)^2 - 4$

$= (x - 1 + 2)(x - 1 - 2)$

$= (x + 1)(x - 3)$.

第1课时 分式的基本性质

【闯关】

知识点一 分式的基本性质

1. 下列各式中, 正确的是 ()

A. $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

B. $\frac{a+1}{b+1} = \frac{a}{b}$

C. $\frac{3a^2b}{ab^2} = \frac{3a}{b}$

D. $\frac{a+2}{b-1} = \frac{3a+2}{3b-1}$

2. (2025·淇滨区校级开学) 若 x, y 的值均扩大为原来的 3 倍, 则下列分式的值保持不变的是

()

A. $\frac{2+x}{x-y}$

B. $\frac{2x}{x-y}$

C. $\frac{2+x}{xy}$

D. $\frac{x^2}{x-y}$

3. 下列式子从左到右的变形一定正确的是 ()

A. $\frac{a+3}{b+3} = \frac{a}{b}$

B. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

C. $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$

D. $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

4. 利用分式的基本性质填空.

(1) $\frac{y}{x} = \frac{(\quad)}{x^2}$;

(2) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{(\quad)}{(a+b)^2}$;

(3) $\frac{2}{ab} = \frac{2ab}{(\quad)}$;

(4) $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{(\quad)}$.

5. 若 $\frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3}$ 成立, 则 x 的取值范围是

_____.

6. (教材 P140 例 2 变式) 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

(1) $\frac{b}{xy} = \frac{bx}{x^2y}$;

(2) $\frac{ab}{4a^2b} = \frac{1}{4a}$;

(3) $\frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}$;

(4) $\frac{x^2-16}{x+4} = x-4$.

知识点二 将分子分母各项的系数化为整数

7. 不改变分式的值, 将下列各式的分子与分母中各项系数化为整数.

(1) $\frac{a - \frac{2}{3}b}{\frac{1}{2}a + 2b} = \frac{(\quad)}{3a + 12b}$;

(2) $\frac{0.4x+2}{0.5x-1} = \frac{(\quad)}{5x-10}$.

知识点三 分式的符号变化

8. 不改变分式的值, 使下列分式的分子和分母不含“-”.

(1) $\frac{3b}{-2a} = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\frac{-5y}{-7x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\frac{-a-2b}{2a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. (易错题) 要使分式 $\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}$ 有意义, 则

x 应满足的条件是 ()

- A. $x \neq 1$ B. $x \neq 2$
C. $x \neq 1$ 或 $x \neq 2$ D. $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$

11. 下列关于分式的判断, 正确的是 ()

- A. 当 $x=2$ 时, $\frac{x+1}{x-2}$ 的值为零
B. 当 $x \neq 3$ 时, $\frac{x-3}{x}$ 有意义
C. 无论 x 为何值, $\frac{3}{x+1}$ 不可能取得整数值
D. 无论 x 为何值, $\frac{3}{x^2+1}$ 的值总为正数

12. (易错题) 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$ 的值为 0.

13. 当 x 取何值时, 下列分式有意义:

(1) $\frac{x+2}{2x-3}$; (2) $\frac{6(x+3)}{|x|-12}$;

(3) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}$; (4) $\frac{x+6}{x^2+1}$.

14. 已知分式 $\frac{x-a}{2x+b}$, 当 $x=4$ 时, 分式没有意义;

当 $x=-3$ 时, 分式的值为零, 求分式 $\frac{a+b}{a-2b}$ 的值.

15. **新考向 过程性学习** 若分式 $\frac{1}{2m-1}$ 的值为正数, 求 m 的取值范围.

关于这道题, 某同学根据除法处理符号的原则, 同号相除得正, 得 $2m-1 > 0$, 求得 $m > \frac{1}{2}$.

(1) 请根据这位同学的做法, 求若 $\frac{3-m}{-5} < 0$, 则 m 的取值范围为 ;

(2) 若想求 $\frac{m-1}{3-m} < 0$ 时 m 的取值范围, 又应

该怎么做呢? 小明说: 之前我学过有理数的除法法则: 除了两数相除同号为正以外, 当两个异号的数相除, 符号是互为相

反数可得 $\begin{cases} m-1 > 0, \\ 3-m < 0, \end{cases}$ 解得 $m > 3$. 同学们,

你们觉得小明做的对吗? 若不对请写出正确的答案及解答过程.

9. 下列各式与 $\frac{x}{x-y}$ 相等的是 ()

A. $\frac{x^2}{(x-y)^2}$

B. $\frac{x^2 - xy}{(x-y)^2}$

C. $\frac{2x}{2x-y}$

D. $\frac{-x}{x+y}$

10. 下列各式从左到右的变形一定正确的是 ()

A. $\frac{x}{y} = \frac{xa}{ya}$

B. $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b$

C. $\frac{0.3x + y}{0.3a + b} = \frac{3x + y}{3a + b}$

D. $\frac{-x + 1}{y + 1} = -\frac{x - 1}{y + 1}$

11. (教材 P142 练习 T3 变式) 不改变分式的值,

把分式中的分子、分母的各项系数化为整数,
并使次数最高项的系数为正数.

(1) $\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}}{0.4x - 0.5};$

(2) $\frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{4}a^3 + a^2}{\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{1}{3}}.$

12. (中考例) 过程性学习 阅读下列材料: 通过小学的学习我们知道, 分数可分为“真分数”和

“假分数”, 而假分数都可化为带分数, 如: $\frac{8}{3} =$

$\frac{6+2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$. 我们定义: 在分式中, 对于

只含有一个字母的分式, 当分子的次数大于或等于分母的次数时, 我们称之为“假分式”;

当分子的次数小于分母的次数时, 我们称之为

“真分式”. 如 $\frac{x-1}{x+1}, \frac{x^2+2x-2}{x+1}$ 这样的分式

就是假分式; $\frac{3}{x+1}, \frac{2x}{x^2+1}$ 这样的分式就是真

分式. 类似地, 假分式也可以化为带分式 (即: 整式与真分式的和的形式).

如: $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}, \frac{x^2+3}{x+1} =$

$\frac{x^2-1+4}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+4}{x+1} = x-1 + \frac{4}{x+1}.$

解决下列问题:

(1) 分式 $\frac{1}{2x}$ 是 _____ 分式 (填“真”或“假”);

(2) 将假分式 $\frac{x^2-1}{x+2}$ 化为带分式;

(3) 如果 x 为整数, 分式 $\frac{2x^2-3x-1}{x+2}$ 的值为

整数, 求所有符合条件的 x 的值.

18.1.1 从分数到分式

【基础闯关】

知识点一 分式的定义

1. (2024·涧西区校级月考) 在代数式 $\frac{2}{x+1}$,

$\frac{x+y}{3}$, $\frac{2}{3}+x$, $\frac{2x-y}{3x}$, $\frac{x}{\pi}$ 中, 分式的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (教材 P139 练习 T1 变式) 列式表示下列各量:

(1) 王老师骑自行车用了 m 小时到达距离家 n 千米的学校, 则王老师的平均速度是 _____ 千米/时; 若王老师乘公共汽车则可少用 0.2 小时, 则公共汽车的平均速度是 _____ 千米/时;

(2) 某班在一次考试中, 有 m 人得 90 分, 有 n 人得 80 分, 那么这两部分人合在一起的平均分是 _____ 分.

3. 下列各式中, 哪些是分式? 哪些是整式?

$\frac{2}{x}$, $\frac{a}{2}+1$, $\frac{x}{5}$, $\frac{3-x}{\pi}$, $\frac{1}{x-2}$, $\frac{2a}{a+b}$, $\frac{2xy^2}{xy}$.

知识点二 分式有意义、无意义的条件

4. (2024·西峡县期末) 要使分式 $\frac{x+1}{x-2}$ 有意义, x 的取值范围是 ()

A. $x \neq -2$ B. $x \neq 2$
C. $x \neq -1$ D. $x \geq 2$

5. (安顺中考) 当 $x=1$ 时, 下列分式没有意义的是 ()

A. $\frac{x+1}{x}$ B. $\frac{x}{x-1}$ C. $\frac{x-1}{x}$ D. $\frac{x}{x+1}$

6. (1) (2024·荥阳期末) 当 x _____ 时, 分式 $\frac{x^2-1}{x}$ 有意义;

(2) 当 $x=$ _____ 时, 分式 $\frac{5}{x^2-1}$ 无意义.

7. (教材 P140 练习 T3 变式) x 取何值时, 下列分式有意义?

(1) $\frac{2x+1}{3x+2}$; (2) $\frac{3}{x^2+1}$; (3) $\frac{1}{x-2}$; (4) $\frac{x}{x^2-4}$.

知识点三 分式的值及分式值为零的条件

8. (易错题) (凉山州中考) 分式 $\frac{x^2-x}{x-1}$ 的值为 0. 则 x 的值是 ()

A. 0 B. -1 C. 1 D. 0 或 1

9. 已知 $a=1$, $b=2$, 则 $\frac{ab}{a-b}$ 的值是 _____.